

IMPLEMENTASI DELAY DIFFERENTIAL EQUATION PADA SOLVER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION MATLAB

Rully Soelaiman dan Yudhi Purwananto

Fakultas Teknologi Informasi, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Kampus ITS, Jl.Raya ITS – Sukolilo, Surabaya 60111, Indonesia
Telp. (031) 5939214, Fax. (031) 5939363
Email: { rully, yudhi }@its-sby.edu

ABSTRAK

Ordinary Differential Equation (ODE) dan Delay Differential Equation (DDE) banyak digunakan untuk menerangkan kejadian-kejadian pada dunia nyata. ODE melibatkan derivatif yang dipengaruhi oleh penyelesaian waktu sekarang dari variabel-variabel yang tidak bergantung pada waktu. Sementara, DDE memiliki tambahan derivatif yang juga dipengaruhi oleh penyelesaian pada waktu sebelumnya.

Penyelesaian persoalan DDE dengan nilai tunda konstan difokuskan pada metode eksplisit Runge Kutta triple BS(2,3) yang digunakan juga oleh solver Matlab nonstiff pada ode23.

Untuk mengimplementasikan permasalahan DDE dengan waktu tunda konstan dengan menggunakan metode Runge-Kutta eksplisit dibutuhkan tiga rumusan yaitu rumusan untuk menghitung nilai pada setiap tahapan integrasi, rumusan untuk menghitung besarnya step size serta rumusan untuk menghitung continuous extension. Pada penelitian ini, diaplikasikan metode Runge Kutta eksplisit dengan rumusan embedded dari Bogacki-Shampine yang mempunyai order 3 serta rumusan continuous extension dengan interpolasi Hermite kubik.

Kata kunci : Delay Differential Equation, Ordinary Differential Equation, Runge Kutta.

1. PENDAHULUAN

Ordinary Differential Equation (ODE) dan Delay Differential Equation (DDE) banyak digunakan untuk menerangkan kejadian-kejadian pada dunia nyata. ODE melibatkan derivatif yang dipengaruhi oleh penyelesaian waktu sekarang dari variabel-variabel yang tidak bergantung pada waktu. Sementara, DDE memiliki tambahan derivatif yang juga dipengaruhi oleh penyelesaian pada waktu sebelumnya. Meskipun ODE dan DDE memiliki similaritas, solusi yang digunakan pada ODE dan DDE berbeda secara signifikan.

DDE yang akan dibahas mempunyai bentuk persamaan sebagai berikut :

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau_1), y(t-\tau_2), \dots, y(t-\tau_k))$$

yang penyelesaiannya berada pada interval $a \leq t \leq b$ dengan kondisi historis $y(t) = S(t)$ pada $t \leq a$. Nilai tunda konstan dinyatakan dengan $\tau = \min(\tau_1, \dots, \tau_k) > 0$.

DDE dengan nilai tunda konstan merupakan bentuk umum DDE yang banyak diaplikasikan untuk keperluan pemodelan dunia nyata (Baker, Paul, Willie).

Penyelesaian persoalan DDE dengan nilai tunda konstan difokuskan pada metode eksplisit Runge Kutta triple BS(2,3) yang digunakan juga

oleh solver Matlab nonstiff pada ode23. Sistematika pembahasan meliputi pengantar DDE, perluasan metode BS(2,3) pada persoalan DDE, analisis konvergensi dan stabilitas, implementasi solver dde23 dan uji coba pada beberapa persoalan pemodelan matematika.

2. PENGANTAR DELAY DIFFERENTIAL EQUATION

Perbedaan utama antara DDE dan ODE terletak pada data insialnya. Penyelesaian ODE ditentukan oleh nilai persamaan pada titik inisial $t=a$. Sedangkan untuk mengevaluasi DDE pada interval $a \leq t \leq b$, jika terdapat suku $y(t-\tau_j)$ dapat merepresentasikan nilai dari solusi pada titik-titik sebelum titik inisial. Contohnya, solusi pada $t = a$ ditentukan oleh nilai pada $a-\tau_j$. Sehingga jika terdapat T yang merupakan nilai tunda terbesar, maka untuk menyelesaikan suatu persoalan DDE perlu disediakan $S(t)$ antara $a-T \leq t \leq a$.

Karena metode numerik pada ODE dan DDE akan juga diaplikasikan pada persoalan yang memiliki beberapa derivatif yang kontinu, maka diskontinyu pada low-order derivatif memerlukan penanganan khusus. Secara umum terjadi diskontinyu pada solusi derivatif pertama di titik inisial karena

$$S'(a-) \neq y'(a+) = f(a, S(a), S(a-\tau_1), \dots, S(a-\tau_k))$$

Diskontinyu dapat terjadi juga pada saat sebelum dan sesudah titik inisial.

Diskontinyu dapat mengalami propagasi. Jika terjadi diskontinyu pada sebuah derivatif, maka akan terjadi perulangan diskontinyu pada interval-interval selanjutnya dengan jarak ditentukan oleh nilai tundanya. Propagasi dapat dideskripsikan secara formal sebagai berikut : jika terjadi diskontinyu di t^* pada derajat k atau dengan kata lain terjadi lompatan pada $y^{(k)}$ di t^* , maka akan terjadi diskontinyu di $t^* + \tau_j$ pada derajat sekurang-kurangnya $k+1$, akan terjadi juga diskontinyu di $t^* + 2\tau_j$ pada derajat sekurang-kurangnya $k+2$ dan seterusnya.

Berikut merupakan contoh diskontinyu pada DDE. Terdapat persamaan

$$y'(t) = -y(t-1) \quad (1)$$

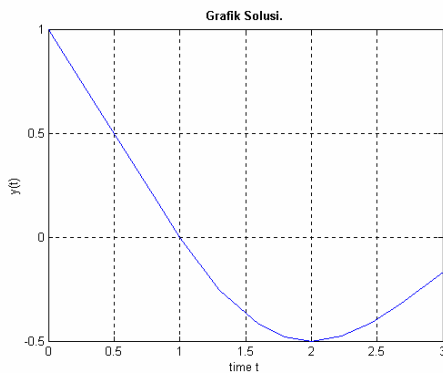
pada $0 \leq t$ dengan fungsi historis $S(t)=1$ untuk $t \leq 0$.

Maka akan didapatkan hasil sebagai berikut

$$y(x) = 1 - x, \quad \text{untuk } 0 \leq x \leq 1$$

$$y(x) = 1 - x + \frac{(x-1)^2}{2!}, \quad \text{untuk } 1 \leq x \leq 2$$

$$y(x) = 1 - x + \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-2)^3}{3!}, \quad \text{untuk } 2 \leq x \leq 3$$



Gambar 1. Grafik solusi persamaan (1)

3. PENDEKATAN EKSPLISIT RUNGE KUTTA

Pada pembahasan berikut akan digunakan metode Runge Kutta Triple yang umum digunakan pada solver ode23 untuk menyelesaikan permasalahan $y'=f(x,y)$ pada interval $[a,b]$ dengan $y(a)$ diketahui. Sebuah triple pada stage s akan melibatkan tiga buah rumusan. Misalnya, diketahui aproksimasi fungsi $y(n)$ pada x_n yaitu y_n dan akan dihitung aproksimasi pada $x_{n+1} = x_n + h_n$. Untuk $i=1, \dots, s$, stage $f_{ni} = f(x_{ni}, y_{ni})$ didefinisikan dengan suku

$$x_{ni} = x_n + c_i h_n \quad \text{dan} \quad y_{ni} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_{nj}$$

Persamaan aproksimasi yang digunakan untuk menentukan nilai integrasi selanjutnya adalah

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i f_{ni}$$

Persamaan tersebut dapat dituliskan juga dengan menggunakan fungsi increment

$$\Phi(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^s b_i f_{ni}$$

Untuk memenuhi penyelesaian fungsi ditambahkan suatu nilai residu yang disebut local truncation error sehingga persamaan menjadi

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h_n \Phi(x_n, y(x_n)) + lte_n$$

Besarnya error pada persamaan tersebut adalah $O(h_n^{p+1})$

Rumusan lain pada triple dituliskan dengan persamaan sebagai berikut

$$y_{n+1}^* = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i^* f_{ni} = y_n + h_n \Phi^*(x_n, y_n)$$

Besar local truncation error dari persamaan tersebut adalah $O(h_n^p)$

Rumusan tersebut hanya digunakan untuk menentukan besarnya step size.

Rumusan ketiga dituliskan sebagai berikut

$$y_{n+\sigma} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i(\sigma) f_{ni} = y_n + h_n \Phi(x_n, y_n, \sigma)$$

Rumusan tersebut merupakan *continuous extension* dari rumusan pertama. Dengan kata lain, rumusan pertama merupakan kondisi khusus dari continuous extension dengan $\sigma=1$.

Agar metode Runge-Kutta triple dapat diaplikasikan untuk penyelesaian DDE, maka dibutuhkan strategi untuk menangani suku historis $y(x_{ni} - \tau_j)$ pada persamaan

$$f_{ni} = f(x_{ni}, y_{ni}, y(x_{ni} - \tau_1), \dots, y(x_{ni} - \tau_k))$$

Terdapat dua keadaan yang harus dibedakan yaitu : $h_n \leq \tau$ dan $h_n > \tau_j$ pada beberapa j . Dimisalkan diketahui fungsi aproksimasi $S(x)$ pada $y(x)$ untuk setiap $x \leq x_n$. Jika $h_n \leq \tau$, maka $x_{ni} - \tau_j \leq x_n$ dan

$$f_{ni} = f(x_{ni}, y_{ni}, S(x_{ni} - \tau_1), \dots, S(x_{ni} - \tau_k))$$

merupakan rumusan eksplisit. Fungsi $S(x)$ merupakan historis inisial pada $x \leq a$.

Setelah dilakukan penghitungan pada langkah x_{n+1} , selanjutnya dengan menggunakan continuous extension didefinisikan $S(x)$ pada rentang

$[x_n, x_{n+1}]$ dengan rumusan

$$S(x_n + \sigma h_n) = y_{n+\sigma}. \quad \text{Dengan data historis yang}$$

telah didefinisikan tersebut dapat dilakukan penghitungan langkah berikutnya. Jika $h_n > \tau_j$ pada beberapa j , maka suku historis $S(x)$ akan dievaluasi pada $span$ dari *current step* dan semua rumusan akan didefinisikan secara implisit. Langkah yang ditempuh untuk menyelesaikan kondisi tersebut adalah sebagai berikut ; saat x_n tercapai,

$S(x)$ didefinisikan untuk $x \leq x_n$. Selanjutnya definisi tersebut diperluas hingga rentang $(x_n, x_n + h_n]$. Hasil tersebut dinyatakan sebagai fungsi $S^0(x)$. Tahapan iterasi selanjutnya dimulai dengan melakukan penghitungan terhadap aproksimasi hasil $S^m(x)$. Iterasi selanjutnya dihitung dengan rumusan eksplisit sebagai berikut

$$S^{(m+1)}(x_n + \sigma h_n) = y_n + h_n \Phi(x_n, y_n, \sigma; S^{(m)}(x))$$

Rumusan tersebut menunjukkan kontraksi dan $S(x)$ terdefinisi pada interval $x \leq x_{n+1}$.

4. KARAKTERISTIK SOLVER DDE23

DDE23 diimplementasikan dengan mengacu pada solver ODE23, yang merupakan implementasi dari pasangan eksplisit Runge-Kutta (2,3) Bogacki dan Shampine yang disebut BS23.

Konfigurasi Array Butcher untuk BS23 adalah sebagai berikut

0				
1/2	1/2			
3/4	0	3/4		
1	2/9	1/3	4/9	
y1	2/9	1/3	4/9	0
y^1	-5/72	1/12	1/9	-1/8

Metode BS23 memenuhi solusi order 3 dengan kondisi sebagai berikut

- $b_1 + b_2 + b_3 = 1$
pada array Butcher BS23 : $2/9 + 1/3 + 4/9 = 1$
- $b_2 c_2 + b_3 c_3 = 1/2$
pada BS23 : $1/3 * 1/2 + 4/9 * 3/4 = 3/6$
- $b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = 1/3$
pada BS23 : $1/3 * 1/4 + 4/9 * 9/16 = 1/3$
- $b_3 c_2 a_{32} = 1/6$
pada BS23 : $4/9 * 1/2 * 3/4 = 1/6$

Pada DDE23, langkah awal yang dilakukan adalah memberikan prediksi $S^0(x)$ dengan nilai konstan y_0 . Selanjutnya, diterapkan properti continuous extension pada langkah sebelumnya untuk menjadi $S^0(x)$ pada langkah sekarang. Pada DDE23 digunakan interpolasi cubic Hermite sebagai fungsi

polinomial pada continuous extension. Prediksi tersebut secara kuantitatif dapat diukur dengan persamaan local truncation error dititik $x_n + \sigma h_n$ dari metode BS23 yang diajukan Dormand sebagai berikut

$$A^{(4)}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{288} (1728\sigma^4 - 7536\sigma^3 + 13132\sigma^2 - 11148\sigma + 3969)^{1/2}$$

Besarnya rasio error antara $y_{n+\sigma}$ dengan y_{n+1} harus lebih kecil atau sama dengan 1 untuk harga $\sigma \leq 1.32$. Penyesuaian (adjustment) step size yang digunakan pada DDE23 sama dengan yang digunakan pada ODE23. Untuk menguji konvergensi, dilakukan dengan iterasi untuk menghitung harga $\|y_{n+1}^{m+1} - y_{n+1}^m\|$ yang tidak lebih besar dari $1/10$ x akurasi yang dibutuhkan y_{n+1} .

5. ANALISIS KONVERGENSI DAN STABILITAS

Untuk dapat menganalisis aspek konvergensi dan stabilitas terhadap metode yang diaplikasikan dengan BS23, maka perlu ditentukan terlebih dahulu model permasalahan yang akan digunakan. Model tersebut merupakan bentuk skalar dengan rumusan sebagai berikut

$$y'(x) = Ly(x) + My(x - \tau)$$

5.1 Aspek Konvergensi

Aspek konvergensi dapat dianalisis dengan pembuktian berikut.

Jika step size h memenuhi

$$h < \min\left(1, \frac{1}{(|L| + |M|)}\right)$$

maka iterasi akan konvergen untuk semua nilai τ yang relatif kecil. Jumlah stage implisit yang dikerjakan akan bergantung dengan perbandingan besar h dengan τ . Pada pembuktian ini diasumsikan terdapat $h \gg \tau$, sehingga BS23 menghasilkan stage implisit yang maksimal. Persaman interpolasi polinomial continuous extension yang digunakan adalah Hermite kubik, sehingga solver juga mencatat slope f_n pada titik x_n sebagai tambahan pada solusi y_n . Pada suatu langkah iterasi mencapai $x_n + h$ nilai y_n, f_n dan $S(x_n - \tau)$ adalah fixed. Nilai continuous extension akan ditentukan oleh nilai-nilai fixed tersebut dan vektor $v = (y_{n+1}, f_{n+1})^T$. Jika $v^{(m)}$ menyatakan current approximation, maka dengan bantuan tools Maple dapat ditentukan matriks iterasi J yang memenuhi

$v^{(m+1)} = Jv^{(m)} + c$. Dapat diketahui juga bahwa semua elemen matriks J merupakan bentuk polinomial kubik dari τ . Dimisalkan J_0 menyatakan matriks yang dievaluasi pada saat $\tau = 0$. Jika $D = \text{diag}\{1, h\}$, maka dapat ditentukan

$$DJ_0D^{-1} = h \begin{pmatrix} M(39+12Lh)/72 & -M(15+6Lh)/144 \\ L+M & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya jika h memenuhi, maka radius spektral J_0 akan memenuhi persamaan

$$\rho(J_0) \leq \|DJ_0D^{-1}\|_\infty < 1$$

Dengan radius spektral J_0 selalu lebih kecil dari 1, maka iterasi akan menuju konvergen dengan h, L, M dan τ yang relatif kecil.

5.2 Aspek Stabilitas

Berdasarkan hasil pengamatan Hairer et.al untuk L dan M real, *sufficient condition* untuk menjaga stabilitas pada DDE adalah $L < 0$ dan $|M| \leq |L|$. Ditunjukkan pula bahwa nilai delay pada $|M| \neq 0$ digunakan untuk menstabilkan sebuah ODE

pada kondisi unstable disebabkan $L > 0$. Berdasarkan pengamatan didapati bahwa perilaku BS23 akan similar dengan metode one-step pada saat $\tau \rightarrow 0$. Dimisalkan proses integrasi telah mencapai x_n dengan step size h . Dengan nilai τ yang relatif kecil, satu-satunya argumen yang tidak berada pada span dari current step adalah $x_n - \tau$.

Argumen tersebut akan berada pada daerah $[x_n - h, x_n]$. Diketahui pula bahwa $S(x)$ merupakan fungsi interpolasi Hermite kubik dengan argumen $y_{n-1}, f_{n-1}, y_n, f_n$. Dengan menggunakan Maple nilai $S(x_n - \tau)$ dapat dinyatakan dalam bentuk interpolasi sebagai berikut

$$S(x_n - \tau) = y_n - \tau f'_n + O(\tau^2) \quad (2)$$

Hanya melalui nilai $S(x_n - \tau)$ tersebut

penghitungan nilai y_{n+1} dapat dipengaruhi oleh nilai y_{n-1}, f_{n-1} . Berdasarkan kondisi tersebut,

analisis stabilitas pada limit $\tau \rightarrow 0$ dapat dilakukan pada current step. Sehingga integrasi dinyatakan stabil jika $|y_{n+1}| < 1$. Nilai

f_n didefinisikan secara implisit berdasarkan persamaan

$$f_n = Ly_n + MS(x_n - \tau) \quad (3)$$

dengan menggunakan persamaan (2) didapatkan persamaan (3)

$$f_n = \left(\frac{L+M}{M\tau+1} \right) y_n + O(\tau^2)$$

Persamaan tersebut similar untuk f_{n+1} . Selanjutnya didefinisikan parameter $z = hL$ dan $Z = hM$. Dengan menggunakan Maple pula didapatkan solusi untuk test equation dengan $y_n = 1$ sebagai berikut

$$y_{n+1} = P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}$$

Polinomial $P(z)$ merupakan polinomial stabilitas dari metode ODE. Persamaan differensial dikatakan stabil jika $\text{Re}(z) < 0$, dan metode dikatakan stabil jika $|P(z)| \leq 1$. Metode dikatakan "damped" jika $|P(z)| < 1$.

6. EKSPERIMEN

6.1. Aplikasi Pemodelan Penyakit Menular

Berikut adalah aplikasi pemodelan matematika untuk penyebaran wabah penyakit menular. Model klasik yang akan dibahas, diajukan oleh Kermack-McKendrick (1927). Pada model tersebut terdapat tiga buah fungsi yaitu $y_1(x)$ yang menunjukkan bagian dari populasi yang rentan untuk terjangkit wabah penyakit, $y_2(x)$ yang menunjukkan bagian dari populasi yang terjangkit wabah penyakit dan $y_3(x)$ yang menunjukkan bagian dari populasi yang kebal terhadap wabah penyakit. Selanjutnya diasumsikan bahwa jumlah individu yang terjangkit wabah penyakit tiap satuan waktu akan proporsional terhadap $y_1(x)y_2(x)$, seperti pada reaksi kimia bimolekular. Jika diasumsikan juga bahwa jumlah individu yang kebal terhadap wabah penyakit akan proporsional terhadap jumlah individu yang terjangkit penyakit maka model tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\dot{y}_1 = -y_1y_2 \quad \dot{y}_2 = y_1y_2 - y_2 \quad \dot{y}_3 = y_2$$

Setelah wabah penyakit berjangkit, seluruh individu akhirnya akan menjadi kebal terhadap wabah tersebut. Jika diasumsikan individu yang telah kebal terhadap penyakit dapat kembali menjadi rentan setelah kurun waktu tertentu misalnya $\tau = 10$, maka akan terjadi lagi terjangkitnya wabah penyakit pada masa tertentu. Jika diberikan masa inkubasi bernilai $\tau_2=1$, maka model matematikanya akan menjadi

Diketahui nilai fase inisial

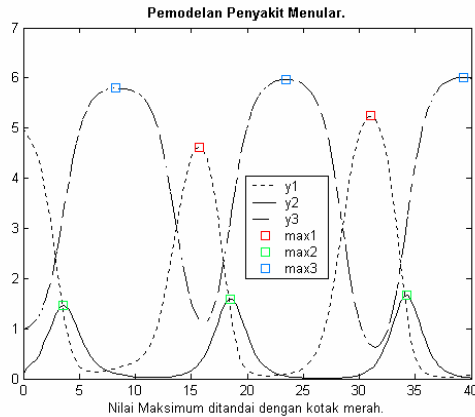
$$y_1(x) = 5, y_2(x) = 0.1, y_3(x) = 1; \quad \text{untuk } x \leq 0.$$

$$\dot{y}_1 = -y_1(x)y_2(x-1) + y_2(x-10)$$

$$\dot{y}_2 = y_1(x)y_2(x-1) - y_2(x)$$

$$\dot{y}_3 = y_2(x) - y_2(x-10)$$

Solusi permasalahan tersebut dapat dilihat pada gambar 2.



Gambar 2. Grafik solusi pemodelan penyakit menular.

6.2. Model Matematika pada Immunologi

Pada contoh berikut akan dibahas model Marchuk yang mendeskripsikan perilaku virus $V(t)$, antibodi $F(t)$ dan sel plasma pada organisma yang terserang penyakit yang disebabkan oleh virus.

$$\frac{dV}{dt} = (h_1 - h_2 F)V$$

$$\frac{dC}{dt} = \xi(m)h_3 F(t - \tau)V(t - \tau) - h_5(C - 1)$$

$$\frac{dF}{dt} = h_4(C - F) - h_8 FV$$

Persamaan pertama adalah persamaan predator-prey Volterra-Lotka. Persamaan kedua mendeskripsikan pembentukan sel plasma baru dengan waktu tunda diakibatkan oleh terjadinya infeksi. Dengan adanya suku kedua pada persamaan tersebut akan mengakibatkan kesetimbangan terjadi pada saat $C=1$. Persamaan ketiga menyatakan pembentukan antibodi dari sel plasma ($h_4 C$), pengurangannya karena umur ($-h_5 F$) dan penggabungannya dengan antigen ($-h_8 FV$). Suku $\xi(m)$ didefinisikan sebagai berikut

$$\xi(m) = \begin{cases} 1; & \text{jika } m \leq 0.1 \\ (1-m)10^9; & \text{jika } 0.1 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

Suku tersebut menyatakan fakta bahwa pembentukan sel plasma akan mengalami penurunan bilamana suatu organisma sedang terserang infeksi. Karakteristik serangan infeksi $m(t)$ diberikan oleh persamaan keempat yaitu

$$\frac{dm}{dt} = h_6 V - h_7 m$$

Jika diketahui parameter-parameter model adalah sebagai berikut

$$\tau=0.5, h_1=2, h_2=0.8, h_3=1, h_4=0.1, h_5=0.5, h_7=0.1, h_8=8$$

Selanjutnya nilai fase inisial untuk model tersebut adalah sebagai berikut

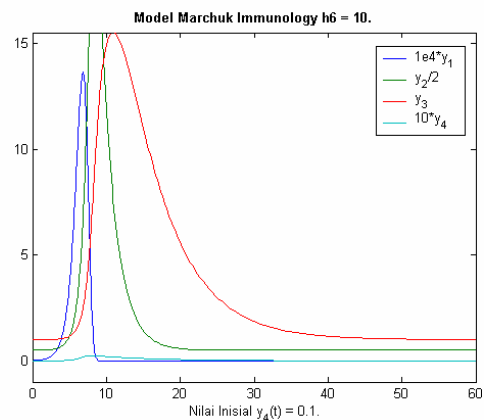
$$V(t) = \max(0, 10^{-6} + t) \quad \text{jika } t \leq 0$$

$$C(0) = 1; F(t) = 1 \quad \text{jika } t \leq 0$$

$$m(0) = 0$$

Parameter h_6 diberikan nilai 10 dan 300.

Solusi permasalahan tersebut dapat dilihat pada gambar 3.



Gambar 3. Grafik solusi pemodelan imunologi.

7. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil implementasi dan analisis ujicoba yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

- Untuk mengimplementasikan permasalahan DDE dengan waktu tunda konstan dengan menggunakan metode Runge-Kutta eksplisit dibutuhkan tiga rumusan yaitu rumusan untuk menghitung nilai pada setiap tahapan integrasi, rumusan untuk menghitung besarnya step size serta rumusan untuk menghitung continuous extension.
- Pada penelitian ini, diaplikasikan metode Runge Kutta eksplisit dengan rumusan embedded dari Bogacki-Shampine yang mempunyai order 3

serta rumusan continuous extension dengan interpolasi Hermite kubik.

- Dengan menggunakan model persamaan skalar $y'(x) = Ly(x) + My(x - \tau)$ dapat dilakukan analisis terhadap aspek konvergensi dan stabilitas sebagai berikut:

- Jika step size h memenuhi

$$h < \min\left(1, \frac{1}{(|L| + |M|)}\right)$$

maka iterasi akan konvergen untuk semua nilai τ yang relatif kecil.

- Didapatkan solusi untuk test equation dengan $y_n = 1$ sebagai berikut

$$y_{n+1} = P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}$$

Polinomial $P(z)$ merupakan polinomial stabilitas dari metode ODE.

8. DAFTAR PUSTAKA

- [1] E.Hairer, S.P.Nørsett, G.Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, 1987
- [2] J.D.Lambert, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*, John Wiley & Sons Ltd., England, 1991
- [3] L.F. Shampine, M.W. Reichlet, The MATLAB ODE Suite, SIAM J.Sci. Comput., 18, 1997.
- [4] Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, *Numerical Methods for Engineers 3rd Edition*, McGraw-Hill, 1998
- [5] Uri M.Ascher, Linda R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [6] L.F. Shampine, S. Thompson, Solving DDEs in MATLAB, Manuscript, Maret 2000.
- [7] L.F. Shampine, S. Thompson, Event Location for Ordinary Differential Equations, Comp.& Maths. With Appls., to appear.